$$U(t,0)=e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}=e^{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z t}$$

الف) در $t_0=0$ سیستم در حالت اسپین بالا باشد:

$$|\alpha,t_0=0\rangle \equiv |\alpha\rangle = |+\rangle \qquad (5)$$

$$|\alpha,t_0=0;t\rangle = U(t,0)|\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z t}|+\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle \qquad (6)$$

در زمان های بعدی نیز سیستم در اسپین بالا می ماند.

$$S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

$$H|+\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|+\rangle$$

ب) سیستم در ابتدا در حالت $|S_x;+\rangle$ باشد:

$$|\alpha,t_0=0\rangle = |S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|\alpha,t_0=0;t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|S_x;+\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z t}|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle$$

سیستم بعد از گذشت زمان، حالت اولیه خود را ترک می کند.

بسم الله الرحمن الرحيم

نوسانگر هماهنگ ساده

به طور مشابه در مورد تکانه داریم:

$$\langle p \rangle = 0 \qquad \text{و} \qquad \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\langle H \rangle}{2} \qquad \text{و} \qquad \left\langle \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\langle H \rangle}{2}$$

روابط پاشندگی عملگرهای مکان و تکانه

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \qquad \text{و} \qquad \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

رابطه عدم قطعیت برای حالت پایه

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

رابطه عدم قطعیت برای حالت برانگیخته

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 \hbar^2$$

معادله موج شرودینگر

تعابیر تابع موج:

$$\rho(\vec{x}',t) = \left|\psi(\vec{x}',t)\right|^2 = \left|\langle \vec{x}'|\alpha,t_0;t\rangle\right|^2$$

$$\int d^3x\, \vec{j}(\vec{x},t) = \int d^3x \left(\frac{\hbar}{m}\right) \mathrm{Im}\, \psi^* \vec{\nabla}\psi$$

$$= \int d^3x\, \mathrm{Im}\left(\frac{i}{m}\right)\left[\psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right)\vec{\nabla}\psi\right]$$

$$= \int d^3x\, \mathrm{Im}\left(\frac{i}{m}\right)\left[\psi^* \vec{p}\,\psi\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{i}{m}\right)\int d^3x\left[\psi^* \vec{p}\,\psi\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{i}{m}\right)\langle \vec{p}\rangle_t$$

$$= \frac{\langle \vec{p}\rangle_t}{m}$$

تقریب نیمه کلاسیک (WKB):

$$e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_1}dx'\sqrt{2m(V(x')-E)}}=e^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\sqrt{2m(E-V(x'))}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_1}dx'\sqrt{2m(V(x')-E)}}=e^{i\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\sqrt{2m(E-V(x'))}-\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Re}}=\cos\left[\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}dx'\sqrt{2m(E-V(x'))}-\frac{\pi}{4}\right]$$

انتشار دهنده به عنوان دامنه گذار

$$K(X'',t,X',t_0)=\langle X''|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)\right]|X'\rangle$$

$$=\sum_{a'}\langle X''|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Ht\right]|a'\rangle\langle a'|\exp\left[+\frac{i}{\hbar}Ht_0\right]|X'\rangle$$

$$=\sum_{a'}\langle X''|u(t)|a'\rangle\langle a'|u^{+}(t_0)|X'\rangle$$

$$=\sum_{a'}\langle X'',t|a'\rangle\langle a'|X',t_0\rangle$$

$$=\langle X'',t|X',t_0\rangle$$

در نمایش هایزنبرگ

$$\int dx\,|x,t\rangle\langle x,t|=\int dx\;e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|x\rangle\langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\left(\underbrace{\int dx\;|x\rangle\langle x|}_{I}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}=1$$

پتانسیل ها و تبدیلات پیمانه ای

پتانسیل های ثابت

در مکانیک کوانتومی اگر در لحظه t_0 هامیلتونی به صورت $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ باشد، خواهیم داشت:

کت حالت در لحظه t_0: $|\alpha,t_0\rangle$

کت حالت در لحظه t: $|\alpha,t_0,t\rangle=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)\right]|\alpha\rangle=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{P^2}{2m}+V(X)\right)(t-t_0)\right]|\alpha\rangle$

اگر پتانسیل به اندازه V_0 تغییر کند:

$$\tilde{V}(X)=V(X)+V_0 \qquad\qquad H=\frac{P^2}{2m}+V(X)+V_0$$

$$|\overline{\alpha,t_0,t}\rangle=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{P^2}{2m}+V(X)+V_0\right)(t-t_0)\right]|\alpha\rangle=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)\right]|\alpha,t_0,t\rangle$$

$$\tilde{V}(X)=V(X)+V_0 \quad\Longrightarrow\quad E\rightarrow E+V_0$$

مقادیر چشمداشتی مشاهده پذیرها در دو حالت تغییر نخواهد کرد.

$$\langle X\rangle=\langle\alpha,t_0,t|X|\alpha,t_0,t\rangle$$

$$\langle\overline{\alpha,t_0,t}|X|\overline{\alpha,t_0,t}\rangle=\langle\alpha,t_0,t|e^{+\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)}Xe^{-\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)}|\alpha,t_0,t\rangle=\langle\alpha,t_0,t|X|\alpha,t_0,t\rangle=\langle X\rangle$$

تبدیلات پیمانه ای در الکترومغناطیس

میدان های الکتریکی و مغناطیسی از این روابط حاصل می شوند:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

تبدیل اول

$$A \rightarrow A \qquad \phi \rightarrow \phi + \lambda$$

تبدیل دوم

$$A \rightarrow A + \nabla\Lambda \qquad \phi \rightarrow \phi$$

تبدیل سوم

$$A \rightarrow A + \nabla\Lambda(x,t) \qquad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{C}\frac{\partial\Lambda(x,t)}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial t}$$

اثر آهارونف – بوم

$(\rho = \rho_a)$

$(\rho = \rho_b)$